Problem set 12

1. (*

$\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}k_BT$, hence $v=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}=3.52\times10^3 ms^{-1}$;

At this speed the electron will travel 1m in $\frac{1m}{3.52\times10^3 ms^{-1}}=2.84\times10^{-4}s$;

$F_z=-\frac{e}{m_e}(m_s h)\frac{\partial B_z}{\partial z}$, the magnitude of the force is

$\frac{1.6\times10^{-19}C}{9.11\times10^{-31}kg}\left(\frac{1}{2}\times1.055\times10^{-34}J\cdot s\right)(10T/m)=9.26\times10^{-23}N$;

$a=\frac{F}{m}=\frac{9.26\times10^{-23}N}{1.67\times10^{-27}kg}=5.55\times10^4 m/s^2$;

The transverse displacement in the z-direction is thus

$\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\left(5.55\times10^4 m/s^2\right)(2.84\times10^{-4}s)^2=2.2mm$.

*)

2. (*

$A=\sum_{ij}A_{ij}|a_i><a_j|$. $B=\sum_{kl}B_{kl}|a_k><a_l|$;

$(AB)^\dagger=\left(\left(\sum_{ij}A_{ij}|a_i><a_j|\right)\left(\sum_{kl}B_{kl}|a_k><a_l|\right)\right)^\dagger$

$=\left(\sum_{ijkl}A_{ij}B_{kl}|a_i><a_j|a_k><a_l|\right)^\dagger$

$=\left(\sum_{ijkl}A_{ij}B_{kl}|a_i>\delta_{jk}<a_l|\right)^\dagger$

$=\sum_{ijl}A^*_{ij}B^*_{jl}|a_l><a_i|$;

$B^\dagger A^\dagger=\left(\sum_{kl}B_{kl}|a_k><a_l|\right)^\dagger\left(\sum_{ij}A_{ij}|a_i><a_j|\right)^\dagger$

$=\left(\sum_{kl}B^*_{kl}|a_l><a_k|\right)\left(\sum_{ij}A^*_{ij}|a_j><a_i|\right)$

$=\sum_{klij}A^*_{ij}B^*_{kl}|a_l><a_k|a_j><a_i|$

$=\sum_{klij}A^*_{ij}B^*_{kl}|a_l>\delta_{kj}<a_i|$

$=\sum_{ijl}A^*_{ij}B^*_{jl}|a_l><a_i|$

$=(AB)^\dagger$.

*)

3. (*

$|S_x;+\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(|+\rangle+|-\rangle)\qquad |S_x;-\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(|+\rangle-|-\rangle)\quad;$

$|S_y;+\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(|+\rangle+i|-\rangle)\qquad |S_y;+\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(|+\rangle-i|-\rangle)\quad;$

$$
\begin{aligned}
&|S_x;+\rangle\langle S_x;+|+|S_x;-\rangle\langle S_x;-|\\
&=\frac{1}{2}(|+\rangle+|-\rangle)(\langle+|+\langle-|)+\frac{1}{2}(|+\rangle-|-\rangle)(\langle+|-\langle-|)\\
&=\frac{1}{2}(|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle+|+|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)+\frac{1}{2}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle+|-|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)\\
&=|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle-|\\
&=1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|S_y;+\rangle\langle S_y;+|+|S_y;-\rangle\langle S_y;-|\\
&=\frac{1}{2}(|+\rangle+i|-\rangle)(\langle+|-i\langle-|)+\frac{1}{2}(|+\rangle-i|-\rangle)(\langle+|+i\langle-|)\\
&=\frac{1}{2}(|+\rangle\langle+|+i|-\rangle\langle+|-i|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)+\frac{1}{2}(|+\rangle\langle+|-i|-\rangle\langle+|+i|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)\\
&=|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle-|\\
&=1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_x&=\frac{\hbar}{2}|S_x;+\rangle\langle S_x;+|-\frac{\hbar}{2}|S_x;-\rangle\langle S_x;-|\\
&=\frac{\hbar}{4}(|+\rangle+|-\rangle)(\langle+|+\langle-|)-\frac{\hbar}{4}(|+\rangle-|-\rangle)(\langle+|-\langle-|)\\
&=\frac{\hbar}{4}(|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle+|+|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)-\frac{\hbar}{4}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle+|-|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)\\
&=\frac{\hbar}{2}(|-\rangle\langle+|+|+\rangle\langle-|);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_y&=\frac{\hbar}{2}|S_y;+\rangle\langle S_y;+|-\frac{\hbar}{2}|S_y;-\rangle\langle S_y;-|\\
&=\frac{\hbar}{4}(|+\rangle+i|-\rangle)(\langle+|-i\langle-|)-\frac{\hbar}{4}(|+\rangle-i|-\rangle)(\langle+|+i\langle-|)\\
&=\frac{\hbar}{4}(|+\rangle\langle+|+i|-\rangle\langle+|-i|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)-\frac{\hbar}{4}(|+\rangle\langle+|-i|-\rangle\langle+|+i|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle-|)\\
&=\frac{i\hbar}{2}(|-\rangle\langle+|-|+\rangle\langle-|).
\end{aligned}
$$

*)

4. (*

$$
\begin{aligned}
[S_x,S_y]&=S_xS_y-S_yS_x\\
&=\frac{i\hbar^2}{4}(|-\rangle\langle+|+|+\rangle\langle-|)(|-\rangle\langle+|-|+\rangle\langle-|)-\frac{i\hbar^2}{4}(|-\rangle\langle+|-|+\rangle\langle-|)(|-\rangle\langle+|+|+\rangle\langle-|)\\
&=\frac{i\hbar^2}{4}(|-\rangle\langle+|-\rangle\langle+|+|+\rangle\langle-|-\rangle\langle+|-|-\rangle\langle+|+\rangle\langle-|-|+\rangle\langle-|+\rangle\langle-|)\\
&\quad-\frac{i\hbar^2}{4}(|-\rangle\langle+|-\rangle\langle+|-|+\rangle\langle-|-\rangle\langle+|+|-\rangle\langle+|+\rangle\langle-|-|+\rangle\langle-|+\rangle\langle-|)\\
&=\frac{i\hbar^2}{4}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)-\frac{i\hbar^2}{4}(-|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle-|)\\
&=\frac{i\hbar^2}{4}2(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)\\
&=i\hbar S_z
\end{aligned}
$$

*)